Д. Ю. Черухин (МГУ)

О ЛИНЕЙНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ И ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ

В докладе речь пойдёт об ограничениях на структуру сети, необходимых для построения на её основе схемы передачи информации (информационная сеть) или вещества (транспортная сеть). В информационных сетях, в отличие от транспортных, допустимо преобразование информации в процессе её передачи. Мы ограничимся линейными информационными сетями, т. е. такими, в которых для преобразования информации используются лишь линейные операции над некоторым полем.

Зафиксируем натуральное число n. *Сетью* будем называть конечный ориентированный граф, в котором выделены $2n$ различных вершин $v_1^-, \dots, v_n^-$, v_1^+, $\dots, v_n^+$, называемых *полюсами*; степень каждого полюса равна 1; рёбра, инцидентные полюсам $v_1^-, \dots, v_n^-$, ориентированы от них, а рёбра, инцидентные полюсам $v_1^+, \dots, v_n^+$, — к ним. Ребро, инцидентное полюсу v_i^-, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим через e_i^-, а ребро, инцидентное полюсу v_i^+ — через e_i^+.

Заметим, что ориентацию ребра мы будем использовать не в качестве направления передачи информации или вещества по данному ребру, а лишь для фиксации одного из двух направлений; передача информации или вещества возможна в любом направлении. Заметим также, что требования различности полюсов и равенства степени полюса единице непринципиальны (иногда, специально оговорив это, мы будем отказываться от этих требований).

Пусть $\mathbb{K}$ — поле. Каждому ребру e данной сети поставим в соответствие переменную x_e, принимающую значения в поле $\mathbb{K}$. Сеть S назовём *линейной*, если каждой её вершине v, отличной от полюсов, приписана система линейных однородных уравнений, зависящих только от тех переменных x_e, для которых ребро e инцидентно вершине v. Систему, состоящую из всех уравнений, приписанных вершинам сети S, обозначим через $U(S)$; любое частное решение системы $U(S)$ назовём *допустимым состоянием* сети S.

Линейная сеть называется *информационной*, если:

а) для любых значений переменных $x_{e_1^-}, \dots, x_{e_n^-}$ существуют значения оставшихся переменных x_e, образующие в совокупности допустимое состояние;

б) для любого допустимого состояния и любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, значения переменных $x_{e_i^-}$ и $x_{e_i^+}$ равны.

Содержательно, сеть является информационной, если она допускает одновременную (возможно, неявную) передачу информации от полюса v_1^- к полюсу v_1^+, ..., от v_n^- — к v_n^+. При этом информация, передаваемая от v_i^- к v_i^+ $(i = 1, \dots, n)$, имеет размерность 1 над $\mathbb{K}$ (если $\mathbb{K}$ конечно, это соответствует $\log_2 |\mathbb{K}|$ битам), и через каждое ребро можно передать информацию, размерность которой не превосходит 1.

В силу определения информационной сети систему $U(S)$ можно разрешить относительно некоторого набора переменных X (включающего все переменные $x_{e_1^-}, \dots, x_{e_n^-}$) так, что равенства $x_{e_i^+} = x_{e_i^-}$, $i = 1, \dots, n$, будут входить в общее решение системы. Тогда каждому ребру сети S можно приписать линейную функцию от переменных набора X (и даже от переменных $x_{e_1^-}, \dots, x_{e_n^-}$) так, что коэффиценты выписанных функций при каждой переменной образуют допустимое состояние, а рёбрам e_i^-, e_i^+, $1 \leqslant i \leqslant n$, приписана функция $x_{e_i^-}$.

Основным результатом доклада является следующая

Теорема. *Линейная сеть S является информационной тогда и только тогда, когда каждому ребру e сети S можно приписать матрицу M_e размера $n \times n$ над полем $\mathbb{K}$ так, чтобы выполнялись условия:*

i) *ранг каждой матрицы M_e не превосходит* 1;

ii) *рёбрам e_i^-, e_i^+, $1 \leqslant i \leqslant n$, приписана матрица M_{ii}, состоящая из нулей, за исключением единицы, стоящей на пересечении i-й строки и i-го столбца;*

iii) *в любой вершине v, отличной от полюсов, сумма матриц по всем входящим в v рёбрам равна сумме матриц по всем исходящим из v рёбрам.*

Теорема позволяет за счёт усложнения структур, приписываемых рёбрам информационной сети (за счёт замены векторов матрицами), упростить систему линейных условий, а именно, оставить в каждой неполюсной вершине одно условие кирхгофовского типа (алгебраическая сумма по всем инцидентным данной вершине рёбрам равна 0). Последнее обстоятельство позволяет надеяться на сходство графовых ограничений для информационных и определённых ниже транспортных сетей (см. гипотезу). Заметим, что ранг матрицы можно рассматривать в качестве инварианта, аналогичного количеству вещества в транспортных сетях.

Линейная сеть S называется *транспортной*, если:

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — поле действительных чисел);

2) каждой вершине v, отличной от полюсов, приписано единственное линейное условие: сумма переменных, соответствующих входящим в v рёбрам, равна сумме переменных, соответствующих выходящим из v рёбрам;

3) каждому ребру e можно приписать вектор из $V_e \in \mathbb{R}^n$ такой, что:

3a) для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, i-е координаты векторов V_e образуют допустимое состояние сети S;

3b) рёбрам e_i^-, e_i^+, $1 \leqslant i \leqslant n$, приписан вектор $(0,\ldots,0,1,0\ldots,0)$, где единица стоит на i-м месте;

3c) сумма модулей координат каждого вектора V_e не превосходит 1.

Содержательно, сеть является транспортной, если по ней возможно одновременно перевести одну (массовую или объёмную) единицу вещества 1-го сорта из полюса v_1^- в полюс v_1^+, …, одну единицу вещества n-го сорта из v_n^- в v_n^+, при этом через каждое ребро может быть в совокупности перевезено (в различных направлениях) не более одной единицы веществ. Количество вещества i-го сорта, перевозимого по ребру e, есть i-я координата вектора V_e; если это число отрицательно, считаем, что перевозка осуществляется в направлении, противоположном выбранной ориентации ребра.

Заметим, что траспортную сеть можно определить более общо, допустив произвольные положительные пропускные способности рёбер и количества перевозимых веществ разных сортов (рациональные пропускные способности рёбер моделируются введением кратных рёбер и отказом от равенства единице степеней полюсов). В этой, более общей формулировке, задача описания транспортных сетей, позволяющих перевозку данных количеств веществ решена при $n = 1$ Фордом и Фалкерсоном [1]; при $n = 2$ теорема Форда-Фалкерсона допускает естественное обобщение, неверное при $n \geqslant 3$.

Представляется справедливой следующая

Гипотеза. *Для любого поля $\mathbb{K}$ и любой информационной сети, построенной на основе сети S, существует транспортная сеть, построенная на основе S.*

Гипотеза верна при $n \leqslant 3$. Заметим, что гипотеза допускает обращение в следующем смысле: если имеется транспортная сеть, построенная на основе сети S, то, увеличив в одно и то же число раз N кратности рёбер в S и заменив каждый полюс N новыми полюсами в той же вершине (сохранив соответствия полюсов друг другу), можно на основе полученной сети построить информационную сеть (при этом мы допускаем совпадения полюсов и произвольные значения их степеней).

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Президента РФ поддержки научных школ (проект НШ–1807.2003.01) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 02–01–00985).

Литература

1. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.